令和８年度八戸工業高等専門学校専攻科入学学力試験問題

【　数学　】

（注意）

１．問題用紙は指示があるまで開かないこと．

２．問題用紙は１ページから６ページまでである．

・試験開始の合図のあとで確かめること．

３．解答欄が足りない場合は裏に書くこと．

$\boxed{1}$　2 つの関数 $f(x)=xe^{-x}$, $g(x)=(2x+1)^{2x+3}$ について以下の問いに答えよ．(30 点)

(1) 導関数 $f'(x)$ と $g'(x)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a, ae^{-a})$ における接線と法線の方程式をそれぞれ求めよ．ただし a は定数とする．

(3) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a, ae^{-a})$ における接線の方程式が，曲線 $y=g(x)$ 上の点 $\mathrm{Q}(0,1)$ における接線の方程式と等しくなるような定数 a の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．(20 点)

(1) a は正の定数とする．$x = a\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と置くことにより，定積分 $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$ の値を求めよ．

(2) 2 次曲線 $x^2 + 4y^2 - 24y + 20 = 0$ を xy 平面上に描け．

(3) (1) の結果を利用することにより，2 次曲線 $x^2 + 4y^2 - 24y + 20 = 0$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

3 次の行列式を因数分解せよ． (25 点)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$\boxed{4}$ ２変数関数 $z = f(x, y)$ のすべての第２次偏導関数が存在し，それらが連続であるとする． $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ であるとき

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

が成り立つことを，合成関数の微分法を用いて示せ． (25 点)

5 次の微分方程式の一般解を求めよ．　(25 点)

$$\frac{dy}{dx} - y\sin x = e^{-\cos x}$$

$\boxed{6}$ 条件 $y(0) = 4,\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 3$ を満たす次の微分方程式の特殊解を求めよ． (25 点)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 3e^{2x}$$